

Logika relací

Logika relací, někdy též uváděná jako kalkul relací, má mnoho společného s logikou tříd. I zde se setkáváme se vztahy mezi relacemi, operacemi s relacemi, s univerzálním vztahem (univerzem) a prázdným vztahem.

Předmětem zájmu logiky relací jsou dvou a vícemístné predikáty. My se budeme zabývat pouze vztahy (relacemi) dvoumístnými. Elementární dvoumístnou relací je formule

$$xRy, \text{ resp. } R(x,y)$$

kde proměnné x, y, z

... jsou proměnné individuí a písmena R, S, T ... relacemi, do nichž individua vstupují.

Formuli čteme „ x je ve vztahu R k y “ anebo „mezi logickými prvky x, y platí relace R “, anebo „ x je R y “ apod.

Vztahový výrok získáme, když ve dvoumístném predikátu ... R ... obsadíme prázdná místa jmény (konstantami) nebo když ve formuli xRy stanovíme obor proměnnosti a uvedeme konstanty.

Příklad. Pro formuli xRy jsme stanovili pro případ

- a) R – relace „být otcem“
 x, y – obor proměnnosti „lidé“.

b) R – relace „být hlavním městem republiky“
 x, y – obor proměnnosti „města v republice“

c) R – relace „být větší“
 x, y – číselný obor proměnnosti.

a) xRy čteme „ x je otcem y “,
Pan Novák je otcem Karla.

b) xRy čteme „ x je hlavním městem y “
Praha je hlavním městem ČR.

c) xRy resp. $x > y$ „ x je větší než y “.

$5 > 6$.

Substitucí konstant (jmen) za proměnné získáme vztahový (relační) výrok, který může být pravdivý (b), nepravdivý (c) nebo v daném okamžiku nerozhodnutelný (a).

Formální rozbor elementární relace

$$xRy$$

Přední člen relace (x) je každá věc x , která je ve vztahu R k y .

Zadní člen relace (y) je každá věc y , pro kterou existuje nějaké x , splňující relaci xRy .

Obor relace – třída všech předních členů relace.

Koobor – třída všech zadních členů relace.

Pole relace – sjednocení (logický součet) oboru a kooboru (všech x a y , kterých se relace týká).

Rozsah relace – třída všech uspořádaných dvojic vytvořených z pole relace.

Příklad. „ x je otcem y “

Předním členem relace (x) je každý muž, který je otcem.
Zadním členem relace (y) je každý člověk.
Oborem relace jsou všichni muži mající alespoň jedno dítě.
Kooborem jsou všichni lidé (každý člověk má otce).
Polem relace jsou všichni existující lidé. (Formálně jde o logický součet $x + y$, přesnější je však v tomto konkrétním případě implikace $x \Rightarrow y$ (každý otec je člověkem).)

Rozsahem relace jsou všechny existující dvojice otec – potomek (syn anebo dcera).

Formální vlastnosti relací

Reflexivnost relace

Nějaká relace R je reflexivní tehdy, jestliže každý prvek pole je ve vztahu R k sobě samému.

$$1.1. \quad xRx, \text{ což lze přesněji vyjádřit } (\forall x)(\forall y)[xRy \supseteq (xRx \wedge yRy)]$$

Reflexivními vztahy jsou všechny ekvivalence výrokové logiky, rovnosti logiky tříd, rovnosti čísel, rovnoběžnost, totožnost. (Platí v obou směrech.)

Ireflexivnost relace R

nastává tenkrát, platí-li $\overline{xRx}$, tzn., že žádný prvek nemá relaci R sám k sobě.

Ireflexivní vztahy jsou antivalence, $\neq$, $<$, $>$, být před, být po, být pak, být nad, být potomkem apod.

Symetričnost relace

Relace R je symetrická, jestliže platí

$$1.2 \quad (\forall x)(\forall y)(xRy \supseteq yRx), \quad (\forall x)(\forall y). xRy = yRx$$

tedy relace xRy implikuje relaci yRx .

Příklad. x hovoří s y , Karel je sourozencem Marie.

Asymetričnost relace

Relace R je asymetrická, jestliže relace xRy implikuje vždy relaci $\overline{yRx}$. (Vylučuje symetrii.)

$$1.3 \quad (\forall x)(\forall y)(xRy \supseteq \overline{yRx}). \quad (\forall x)(\forall y) xRy \not\supseteq yRx$$

Příklad. $<$, $>$, být otcem, být vedoucím apod.

U některých relací nelze s určitostí říci, jde-li vždy o symetrii nebo asymetrii. Takovým relacím říkáme

Polosymetrické relace

$$1.4 \quad [(\forall x)(\forall y)(xRy \rightarrow \neg Ryx)] \vee [(\forall x)(\forall y)(xRy \rightarrow \overline{Ryx})]$$

Takovými relacemi jsou např. relace $\in$, $\subset$, znát někoho, učit někoho, milovat někoho, uctívat někoho apod.

(Zvláště v pedagogickém procesu dochází k tomu, že se mnohdy učitel něco „naučí“ od svých žáků.)

Tranzitivnost relace

Relace R je tranzitivní tehdy a jen tehdy, když pro kterékoli tři prvky x, y, z platí

$$1.5 \quad (\forall x)(\forall y)(\forall z) (xRy \wedge yRz \rightarrow xRz)$$

(Srovnej se zákonem hypotetického sylogismu výrokové logiky.)

Tranzitivními vztahy jsou inkluze tříd, implikace výroků, ekvivalence výroků, rovnost tříd, $>$, $<$, být příbuzný. Za tranzitivní vztah je pokládána dědičnost apod.

Pokud formalizujeme z praktických důvodů nějaké konkrétní vztahy, vždy se vyskytnou případy, které nazveme *netranzitivní* nebo *polotranzitivní*.

$$1.6 \quad \text{Netranzitivní} \quad (\forall x)(\forall z)(\exists y) [(xRy \wedge yRz) \wedge \neg xRz]$$

Příklad. být otcem, být následníkem, být sousedem v abecedním seznamu.)

1.7 Polotranzitivní

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z) \{ [(xRy \wedge yRz) \rightarrow xRz] \wedge [(\exists u)(xRu \wedge \neg uRz)] \}$$

Příklad. Novák je přítelem Dobrého a Dobrý je přítelem Vejvody, pak Novák je přítelem Vejvody, ovšem také se Novák s Vejvodou mohou nenávidět.

Souvislost relace

Relace R je souvislá, jestliže pro dvojici prvků x, y platí

$$1.8 \quad (\exists x)(\exists y) (xRy \rightarrow yRx)$$

Příklad. $(a > b) \rightarrow (b > a)$,

Karel je chytřejší než Václav nebo Václav je chytřejší než Karel.

q

Charakterem disjunkce je dáno, že relace je souvislá, je-li splněn alespoň jeden z uvedených vztahů. Ve všech ostatních případech jde o relaci nesouvislou.

$$1.9 \quad (\exists x)(\exists y) (\overline{xRy} \rightarrow yRx)$$

Příklad. Manžel není pokrevní příbuzný manželky a manželka není příbuzná manžela. (Úmyslně uvádíme tuto formulaci, abychom zdůraznili, že

$$(\exists x)(\exists y) (\overline{xRy} \rightarrow yRx) \approx (\exists x)(\exists y) (\overline{xRy} \rightarrow \overline{yRx})$$

q

Operace se vztahy (relacemi)

Stejně jako v kalkulu tříd je možno i v kalkulu relací vytvářet z daných relací relace nové. (Z relací R a S vytvoříme relaci $(R \cup S)$, $(R + S)$, (RS)).

Inkluze relací

$$R \sqsubseteq S$$

relace R je podřazena relaci S , to znamená, že je v relaci S obsažena.

$$1.10 \quad R \sqsubseteq S \iff (\forall x)(\forall y) (xRy \supset xSy)$$

Příklad. R – být synem, S – být dítětem. Je-li Karel synem Marie, pak je jejím dítětem. (Marie může mít ještě dcery.)

$$R \subset S$$

$$(\forall x)(\forall y) (x < y \supset x \leq y).$$

q

Rovnost relací

$$1.11 \quad R = S \iff (\forall x)(\forall y) (R \sqsubseteq S \wedge S \sqsubseteq R)$$

Důkaz lze podat vhodnou substitucí a prostředky výrokového kalkulu.

Poznámka: Protože dochází k mohutnému rozmachu výpočetní techniky, jsou prakticky řešitelné i úlohy, které byly dříve doménou teorie. Je tomu tak právě u hromadného zpracování dat ve veřejné a státní správě, kde zaujímá významné místo evidence občanů. Uváděné příklady jsou právě z této oblasti.

Rovnost lze také vyjádřit

$$1.12 \quad R = S \iff (\forall x)(\forall y) (xRy \iff xSy)$$

Příklad. R – být dítětem, S – být bezprostředním potomkem.

Nerovnost relací

$$1.13 \quad R \not\sqsubseteq S$$

Formule pro vztahy nerovnosti lze snadno odvodit z formulí pro rovnost.

Jednou si takové odvození demonstrujeme. Vyjdeme z 1.10 a 1.11 a sestavíme formuli

$$1.12 \quad \{(R = S) \approx (\forall x)(\forall y)[(xRy \supset xSy) \wedge (xSy \supset xRy)]\} \supset \\ \{(R \not\approx S) \approx \overline{(\forall x)(\forall y)[(xRy \supset xSy) \wedge (xSy \supset xRy)]}\}$$

Konsekvent této implikace budeme transformovat:

$$(R \not\approx S) \approx \overline{(\forall x)(\forall y)[(\overline{xRy} \supset \overline{xSy}) \wedge (\overline{xSy} \supset \overline{xRy})]}$$

dle zákona logiky predikátů

$$\overline{(\forall x)F(x)} = \forall x \overline{F(x)}$$

$$(R \not\approx S) \approx \overline{(\forall x)(\forall y) [(\overline{xRy} \supset \overline{xSy}) \wedge (\overline{xSy} \supset \overline{xRy})]} \text{ dle Z 31, Z 55}$$

$$(R \not\approx S) \approx \overline{(\forall x)(\forall y) [xRy \supset xSy \wedge (xRy)(xSy)]} \text{ dle Z 40}$$

$$(R \not\approx S) \approx \overline{(\forall x)(\forall y) [xRy \approx xSy]} \quad \text{dle duál. zák.}$$

$$(R \not\approx S) \approx (\exists x)(\exists y) [\overline{xRy \approx xSy}]$$

$$(R \not\approx S) \approx (\exists x)(\exists y) [xRy \not\approx xSy]$$

Výsledkem naší demonstrace je implikace

$$1.14 \quad \{(R = S) \approx (\forall x)(\forall y) [(xRy \supset xSy) \wedge (xSy \supset xRy)]\} \supset \\ \supset \{(R \not\approx S) \approx (\exists x)(\exists y) [xRy \not\approx xSy]\}, \text{ resp.} \\ \supset \{(R \not\approx S) \approx (\exists x)(\exists y) \overline{[xRy \approx xSy]}\} = \\ \supset \{(R \not\approx S) \approx (\exists x)(\exists y) [xRy \not\approx xSy]\}$$

Součet relací (sjednocení)

1.15 $(R + S)$

$$(\forall x)(\forall y) [x(R + S)y \iff xRy \vee xSy]$$

Relační součet $(R + S)$ mezi dvěma logickými individui (předměty) platí tehdy a jen tehdy, platí-li alespoň jeden z relací R , S .

Příklad. R – pokrevní příbuznost
 S – zešvagřen
 $(R + S)$ – příbuzný

R – student PEF
 S – student FEL
 $(R + S)$ – student ZČU

q

Průnik relací

1.16 $(R \cap S)$

$$(\forall x)(\forall y) [x(R \cap S)y \iff xRy \wedge xSy]$$

Průnik (relační součin) mezi dvěma logickými individui platí tehdy a jen tehdy, platí-li současně obě relace (resp. všechny relace).

Příklad. R – student ZČU
 S – cizí státní příslušník
 $(R \cap S)$ – zahraniční student

Doplněk relace

označujeme jej $\bar{R}$.

Relace $\bar{R}$ platí tehdy a jen tehdy, neplatí-li relace R .

$$1.17 (\forall x)(\forall y) [x\bar{R}y \approx \overline{xRy}]$$

Prázdná a univerzální relace

Podobně jako v logice tříd můžeme i v logice relací zavést prázdnou a univerzální relaci.

Prázdná relace neplatí mezi žádnými dvěma individui (objekty).

Univerzální relace platí mezi jakýmkoliv dvěma individui (objekty).

Třída všech uspořádaných vztahových dvojic (x, y) tvoří *vztahové univerzum*.

Pro vztahové univerzum budeme používat stejně jako v kalkulu tříd konstanty 1, pro prázdnou relaci konstanty 0.

Pro součet relací, průnik relací, doplnku relací, vztahové (relační) univerzum a prázdné relace lze využívat zákonů logiky tříd a proto se jimi nebudeme více zabývat.

Existují však specifické relace, které nemají v jiných kalkulech obdoby.

Inverzní relace

vyjadřuje převrácený vztah. Ke každé relaci R lze utvořit inverzní relaci R^{-1} tehdy, najdeme-li ke každému x takové y , které je ve vztahu R k x .

$$1.18 (\forall x)(\forall y) [xR^{-1}y \approx yRx]$$

Příklad. „pracovník je podřízený vedoucímu, vedoucí je nadřízený pracovníkovi.“

$$„x < y, y < x“$$

„rodiče ručí za dítě, dítě má v rodičích ručitele“.

q

Zřetězení relací (kompozit)

označení $R|S$

$$1.19 (\textcircled{x})(\textcircled{y})(\textcircled{z}) [xR|Sy \approx (xRz \textcircled{\text{E}} Sy)]$$

Zřetězování relací je mimořádně důležitou operací logiky predikátů, protože umožňuje praktické využívání (v rozličných evidencích, v organizačních postupech, v technologických postupech apod.).

Příklad. $(\textcircled{x})(\textcircled{y})(\textcircled{z}) [xR|Sy \approx xRz \textcircled{\text{E}} Sy]$

$(R|S)$ – švagr

R – manžel

S – sestra

x – Jan

y – Karel

z – Marie

Jan (x) je švagrem ($R|S$) Karla (y), tehdy a jen tehdy, existuje-li Marie (z), která je manželkou (R) Jana (x) a sestrou (S) Karla (y).

q

Zřetězování samozřejmě nekončí sřetězováním dvou relací, ale umožňuje vytváření složitých kompozicí.

Prudký rozvoj počítačů umožňuje přejít u řady řešených problémů od teoretických modelů k praktickému využití. Jako příklad si můžeme uvést evidenci občanů vedenou na ohlašovnicích obecních úřadů a v centrálním registru ministerstva vnitra. Ze základního souboru lze vhodným programovým aparátem vytvářet tzv. *rodinné vazby*.

Příklad. Zavedme si zkratky pro tři základní rodinné vztahy:

M – manželé

R – rodiče

D – bezprostřední potomci

(zde se o přesný obsah pojmu vedou spory. Pojmu „dítě“ je vytýkáno, že je sporné pokládat 60letého potomka 80letého rodiče za „dítě“). Pouhý pojem „potomek“ zase nevyjadřuje rozdíl mezi synem, vnukem, pravnukem atd.

Těmito základními vztahy lze díky kompozitu definovat všechny rodinné (příbuzenské) vztahy další, včetně rozlišování vztahů pokrevních a zešvagřených.

(Pro přehlednější zápis upustíme od uvádění kvantifikátorů.)

xSy	(sourozenec)	$\approx xDz \approx \bar{z}Ry$
$x\check{S}y$	(švagr, švagrová)	$\approx xMz \approx \bar{z}Sy$
xTy	(strýc, teta)	$\approx xSz \approx \bar{z}Ry$
xNy	(synovec, neteř)	$\approx xDz \approx \bar{z}Sy$
xVy	(vnuk, vnučka)	$\approx xDz \approx \bar{z}Dy$
xPy	(prarodič, děda, babi)	$\approx xRz \approx \bar{z}Ry$
xBy	(bratranec, sestřenice)	$\approx xNz \approx \bar{z}Ry$
		$xDz \approx \bar{z}Ty$

Tvrzení, že všechny vztahy zavádíme pouze kompozity základních vztahů (manželé, rodiče, bezprostřední potomci) je oprávněné, protože např. švagra můžeme definovat tak, že za S (sourozenec) dosadíme ($x Dz \approx \bar{z} Ry$) s tím, že přibude jeden ze zprostředkujících prvků (u).

$$x\check{S}y \approx xMz \approx \bar{z}(zDu \approx \bar{u}Ry)$$

Stejně si můžeme počínat i v dalších případech.

Složitější relací je na příklad

$$\text{švagrův tchán } (\check{S}|T) \approx$$

$$(\odot x)(\odot y)(\odot z)(\odot u)(\odot w)[xMz \approx \bar{z}Su \approx \bar{z}Mw \approx \bar{w}Dy]$$

„Mezi x a y platí vztah, že „ y je švagrův tchán“ tehdy a jen tehdy, je-li

(x manželem z) a (z sourozencem u) a (u manželem w) a (w bezprostředním potomkem y).

Čtenář si jistě všimne toho, že nerozlišujeme manžela – manželku, otce – matku, syna – dceru, strýce – tetu atd. Není to nutné, protože relace tohoto typu se provádějí počítačově na rodných číslech, z nichž jde kdykoliv zjistit o jaké pohlaví se jedná. Je-li měsíc narození 1 – 12, pak se tiskne „manžel“, „otec“, „bratranec“ apod. Je-li měsíc narození 50 – 62, jdou do tisku znaky „matka“, „dcera“, „babička“ atd.

Pro praktické využívání uvedených příkladů postačí jako základní soubor registr občanů, v němž je u každého občana vedle základních údajů (příjmení, jméno, rodné číslo, adresa, stav, národnost) uveden kód příbuzenského vztahu a rodné číslo příbuzného pro manžele, rodiče a bezprostřední potomky (děti).

Na závěr ještě několik příkladů rodinných vazeb, kde vycházíme z předpokladu vztahů R – rodiče, D – dítě (bezprostřední potomek), M – manžel a vazeb odvozených.

a)

$$(xRy_1 \wedge xRy_2 \wedge xRy_3) \Leftrightarrow S(y_1, y_2, y_3) \quad \text{zkráceně}$$

$$(xR(y_1 \wedge y_2 \wedge y_3)) \Leftrightarrow S(y_1, y_2, y_3).$$

Jestliže x je rodičem y_1 a y_2 a y_3 , pak y_1 , y_2 a y_3 jsou *sourozenci*.

b)

$$(y_1 \wedge y_2 \wedge y_3)Dx \Leftrightarrow S(y_1, y_2, y_3)$$

Jestliže y_1 je dítětem x a y_2 je dítětem x a y_3 je dítětem x , pak y_1 , y_2 , y_3 jsou *sourozenci*.

c)

$$[S(y_1, y_2, y_3) \wedge y_1 Mz] \Leftrightarrow \check{S}(z, y_2, y_3)$$

Jestliže y_1, y_2, y_3 jsou sourozenci a y_1 je manželem z ,
pak y_2, y_3 jsou švagrem (švagrovou) z .

d)

$$[S(y_1, y_2, y_3) \wedge y_1 R w] \stackrel{\Delta}{=} T(y_2, y_3, w)$$

e)

$$[T(y_2, y_3, w) \wedge w R(r_1, r_2)] \stackrel{\Delta}{=} B(y_2, y_3, r_1, r_2)$$

stliže w je strýcem y_1, y_3 a w je otcem r_1, r_2 pak y_2, y_3 jsou
bratrance r_1, r_2 .

atd.

Takto je možno při definování základních vztahů a využívání
jednoznačných identifikátorů (rodných čísel) vytvářet další a další
rodinné vazby.

Jsou-li základní relace definovány a formalizovány, je možno
rodinné vazby rozvíjet následujícími úvahami:

(Formule nechť si každý sestaví sám.)

1. x je rodičem y_1, y_2, y_3 .
2. y_1, y_2, y_3 jsou potomky rodiče x .
3. y_1, y_2, y_3 jsou sourozenci.
4. Je-li y_1 rodičem a , pak
 - 4.1: a je vnukem x ,
 - 4.2: x je prarodičem a ,
 - 4.3: a je synovcem y_2, y_3 ,
 - 4.4: y_2, y_3 jsou strýci a .
5. Je-li y_2 rodičem b , pak
 - 5.1: b je vnukem x ,
 - 5.2: x je prarodičem b ,
 - 5.3: b je synovcem y_1, y_3
 - 5.4: y_1, y_3 jsou strýci b .

atd. – pro případného dalšího potomka c .

6. Potomci a, b, c jsou si vzájemně bratřenci (sestřenicemi).
7. Jestliže se y_1, y_2, y_3 ožení (vdají), pak jejich manželé (-lky) jsou tetami (strýci) pro a, b, c . (Příbuzenstvo zešvagřené.)
8. Je-li x ženat, pak jeho žena je
8.1: matkou y_1, y_2, y_3 , nebo
8.2: nevlastní matkou y_1, y_2, y_3 ,
8.3: nebo někoho matkou, někoho macechou.
9. Manželky y_1, y_2, y_3 jsou si švagrovými.
10. Pro x jsou manželky y_1, y_2, y_3 snachami, x je jejich tchánem, jeho manželka tchyní.
11. Ožení-li se někdo z y_1, y_2, y_3 následují popsané vztahy na další generační úrovni. (Z potomků se stávají rodiče, z rodičů prarodiče, ze sestřenic a bratřenců tety a strýci atd..)